Phần 1. ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

Gv: Phan Ngô Tuấn Anh
Khoa Toán – Thống Kê, UEH

Chương 1. Ma trận & định thức

I. Ma trận

1.1 Định nghĩa

Một *ma trận* (matrix) A cấp $m\times n$ là một bảng số gồm có m dòng, n cột. Các phần tử của A là những số thực tùy ý.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Trong ma trận A ở trên thì $a_{ij}\in\mathbb{R}$ là phần tử thuộc dòng i, cột j của A. Ta ký hiệu ma trận A là $A=(a_{ij})_{m\times n}$

Ví dụ: $A=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ (ma trận cấp 2×3)

Ma trận cấp $n\times n$ được gọi là ma trận *vuông* cấp n.

Ví dụ:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \text{ (ma trận vuông cấp 2)}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ (ma trận vuông cấp 3)}$$

Đối với ma trận $A=(a_{ij})_{n\times n}$ vuông cấp n thì các phần tử $a_{11},a_{22},\ldots,a_{nn}$ (có chỉ số dòng bằng chỉ số cột) tạo thành *đường chéo chính* của A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & x & \cdots & x \\ x & a_{22} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ví dụ: Với ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 6 & 2 & 7 \\ 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$ thì đường chéo chính gồm các phần tử là $1, 2, 3$

Ma trận mà mọi phần tử của nó đều bằng 0 được gọi là *ma trận không* (ma trận zero), ký hiệu là $O_{m\times n}$ (hoặc ký hiệu là O, nếu cấp của ma trận được hiểu ngầm).

Ví dụ: $O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $O_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ma trận *đơn vị cấp n*, ký hiệu là I_n (Identity matrix), là ma trận vuông cấp n có dạng:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(các phần tử thuộc đường chéo chính đều bằng 1, các phần tử còn lại đều bằng 0)

Ví dụ:

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (ma trận đơn vị cấp 2)}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (ma trận đơn vị cấp 3)}$$

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n. Ta nói:

- Ma trận A có dạng *tam giác trên* (upper triangle matrix) nếu mọi phần tử nằm phía dưới đường chéo chính của A đều bằng 0:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \text{(ma trận tam giác trên)}$$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (ma trận tam giác trên)

- Ma trận A có dạng *tam giác dưới* (lower triangle matrix) nếu mọi phần tử nằm phía trên đường chéo chính của A đều bằng 0:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{(ma trận tam giác dưới)}$$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ (ma trận tam giác dưới)

Nhận xét: Ma trận đơn vị I_n là ma trận tam giác trên và cũng là ma trận tam giác dưới.

Ta quy ước hai ma trận A và B là bằng nhau nếu chúng có cùng cấp (kích thước) và có số liệu hoàn toàn giống nhau, ký hiệu là $A = B$

1.2 Các phép toán ma trận

a) Phép cộng ma trận (addition)

Cho A và B là hai ma trận có cùng cấp $m \times n$, khi đó ma trận tổng $A + B$ có được bằng cách cộng các phần tử tương ứng của A và B.

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to A + B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$

b) Phép nhân vô hướng (scalar multiplication)

Cho A là ma trận cấp $m \times n$ và α là một số thực, khi đó ma trận tích αA có được bằng cách nhân số α vào tất cả các phần tử của A.

Ví dụ: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 6 & 5 & 4\end{pmatrix};\ \alpha=\frac{1}{2}\rightarrow \alpha A=\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 0\\ 3 & \frac{5}{2} & 2\end{pmatrix}$

Mệnh đề. Cho A,B,C là các ma trận cấp $m\times n$ và α,β là các số thực. Ta có:

- $(A+B)+C=A+(B+C)$ (tính kết hợp của phép cộng)
- $A+B=B+A$ (tính giao hoán của phép cộng)
- $A+O_{m\times n}=A$
- $A+(-1)A=O_{m\times n}$ (ma trận $(-1)A$ được gọi là ma trận đối của A, ký hiệu là $-A$)
- $0.A=O_{m\times n}$ và $1.A=A$
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
- $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

c) Phép chuyển vị (Transpose)

Cho A là ma trận cấp $m\times n$, khi đó ma trận chuyển vị A^T có được từ A bằng cách xoay các dòng của A thành các cột tương ứng của A^T. Ma trận A^T có cấp là $n\times m$

Ví dụ: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$

Ví dụ: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$

Do phép chuyển vị là xoay dòng thành cột nên ta có:

Mệnh đề. Cho A,B là các ma trận cấp $m\times n$ và α là số thực. Ta có:

- $\left(A^T\right)^T=A$
- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(\alpha A)^T=\alpha A^T$

Ví dụ: $(2A-3B)^T=2A^T-3B^T$

d) Phép nhân ma trận (matrix product)

Cho các ma trận $A=(a_{ij})_{m\times p}$ và $B=(b_{ij})_{p\times n}$ (số cột của A phải bằng với số dòng của B).

Khi đó, ma trận tích AB có cấp là $m\times n$

Để tính các phần tử của ma trận AB, chẳng hạn muốn tính phần tử $(AB)_{ij}$ thì ta:

- quan sát dòng thứ i của A và cột thứ j của B (là những véc tơ gồm p tọa độ):
  - dòng i của A là $\boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{ip}}$
  - cột j của B là $\boxed{\begin{matrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{matrix}}$
- nhân từng cặp tọa độ tương ứng của hai véc tơ này với nhau, rồi cộng lại:

$$\boxed{(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots a_{ip}b_{pj}}$$

Nói cách khác, phần tử $(AB)_{ij}$ là *tích vô hướng* của véc tơ *dòng i* của A với véc tơ *cột j* của B

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}_{2\times 3}$; $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}_{3\times 1}$ thì $AB = \begin{pmatrix} 1\times 7 + 2\times 8 + 3\times 9 \\ 4\times 7 + 5\times 8 + 6\times 9 \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 50 \\ 122 \end{pmatrix}_{2\times 1}$

Chú ý rằng, trong ví dụ này thì ma trận BA không tồn tại vì số cột của B khác số dòng của A.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}_{3\times 2}$, ta đặt $AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2}$ thì:

$$c_{11} = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 = 20$$

$$c_{12} = 1\times(-1) + 2\times(-2) + 3\times(-3) = -14$$

$$c_{21} = 4\times 2 + 5\times 3 + 6\times 4 = 47$$

$$c_{22} = 4\times(-1) + 5\times(-2) + 6\times(-3) = -32$$

$$c_{31} = 7\times 2 + 8\times 3 + 9\times 4 = 74$$

$$c_{32} = 7\times(-1) + 8\times(-2) + 9\times(-3) = -50$$

Vậy,

$$AB = \begin{pmatrix} 20 & -14 \\ 47 & -32 \\ 74 & -50 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Trong ví dụ này thì ma trận BA cũng không tồn tại vì số cột của B khác số dòng của A.

Ví dụ: Cho $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}_{2\times2}$ và $B=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}_{2\times2}$ thì

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19&22\\43&50\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}23&34\\31&46\end{pmatrix}$$

(tích của hai ma trận vuông cấp 2 là một ma trận vuông cấp 2)

Ta thấy $AB\neq BA$

Ví dụ: Cho $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}_{2\times2}$ thì

$$AA^T=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&11\\11&25\end{pmatrix}$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&14\\14&20\end{pmatrix}$$

Ta lại thấy $AA^T\neq A^TA$

Nhận xét: Phép nhân ma trận, nói chung, không có tính giao hoán. Do đó, khi nhân các ma trận thì ta không được phép đảo thứ tự của các ma trận.

Ví dụ: Cho $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ và $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ thì $AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_{2\times2}$ (ma trận không)

Nhưng cả A và B đều khác ma trận không.

Nhận xét: Nếu A và B là các ma trận thì từ đẳng thức $AB=O$ (ma trận không) ta không thể suy ra $A=O$ hay $B=O$ (trong hệ thống số thực thì $xy=0\rightarrow x=0$ hay $y=0$)

Ví dụ: Tìm các ma trận A,B,C vuông cấp 2, khác không thỏa $AB=AC$ nhưng $B\neq C$

HD: Lấy $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ và $C=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$

Phép nhân ma trận, tuy mất đi tính giao hoán, nhưng vẫn còn giữ lại được một số tính chất quen thuộc, cụ thể là:

Mệnh đề.

- Nếu A là ma trận cấp $m\times p$, B là ma trận cấp $p\times q$, C là ma trận cấp $q\times n$ thì

$$(AB)C=A(BC)\text{ (tính kết hợp của phép nhân)}$$

- Nếu A là ma trận cấp $m \times n$ thì $A.O_{n\times q} = O_{m\times q}$ và $O_{p\times m}.A = O_{p\times n}$
- Nếu A là ma trận cấp $m \times n$ thì $A.I_n = A$ và $I_m.A = A$

  Đặc biệt, nếu A là ma trận vuông cấp n thì $A.I_n = A = I_n.A$

  Tính chất này nói rằng, trong phép nhân ma trận thì ma trận I_n đóng vai trò giống như số 1 trong phép nhân số thực (nghĩa là $a.1 = a = 1.a$). Do đó, từ nay trở đi, ta sẽ gọi ma trận I_n là *phần tử đơn vị* trong phép nhân ma trận.
- Nếu A là là ma trận cấp $m \times p$, B và C là các ma trận cấp $p \times n$ thì

  $A(B+C) = AB + AC$ (tính phân phối của phép nhân đối với phép cộng)
- Nếu A và B là các ma trận cấp $m \times p$, C là ma trận cấp $p \times n$ thì

  $(A+B)C = AC + BC$ (tính phân phối của phép nhân đối với phép cộng)
- Nếu A là ma trận cấp $m \times p$, B là ma trận cấp $p \times n$ và α là số thực thì

$$A(\alpha B) = \alpha(AB) = (\alpha A)B$$

- Nếu A là ma trận cấp $m \times p$ và B là ma trận cấp $p \times n$ thì

$$(AB)^T = B^T A^T$$

  (ta có thể mở rộng: $(ABC)^T = C^T B^T A^T$)

Nhận xét: Do tính kết hợp của phép nhân ma trận nên với A, B, C, D là các ma trận thì ta có thể viết:

$$\begin{aligned} ABCD &= (ABC)D \\ &= (AB)(CD) \\ &= A(BC)D \\ &= A(BCD) \end{aligned}$$

nhưng phải chú ý *giữ nguyên thứ tự* của các ma trận trong mỗi cách kết hợp vì phép nhân ma trận không có tính giao hoán.

e) Lũy thừa ma trận (powers of matrix)

Cho A là ma trận vuông cấp n và k là số nguyên dương. Ta định nghĩa:

$$\begin{aligned} A^1 &= A \\ A^2 &= A.A \\ \vdots &\quad \vdots \\ A^k &= \underbrace{A.A\ldots A}_{k} = A^{k-1}.A \end{aligned}$$

Ta quy ước $A^0 = I_n$

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, tìm biểu thức của A^n (với n là số nguyên dương).

Với $n = 1$ thì $A^1 = A$

Với $n = 2$ thì

$$\begin{aligned} A^2 &= A.A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Với $n = 3$ thì

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2.A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= O_{3\times 3} \end{aligned}$$

Suy ra $A^n = O_{3\times 3}$ (ma trận không) khi $n \geq 3$.

Ghi chú. Trong hệ thống số thực $\mathbb{R}$ thì ta có những hằng đẳng thức quen thuộc, chẳng hạn:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \ ; \ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2 ; \ (a+b)^3 = a^3 + 3a^3b + 3ab^2 + b^3$$

Các đẳng thức này là đúng vì phép nhân số thực có tính giao hoán, nghĩa là $ab = ba$. Tuy nhiên, phép nhân ma trận lại không có tính giao hoán, nghĩa là nói chung thì $AB \neq BA$. Do đó, nói chung thì các hằng đẳng thức trên không còn đúng đối với ma trận. Nếu hai ma trận vuông A và B thỏa $AB = BA$ thì các hằng đẳng thức trên áp dụng được cho ma trận, cụ thể là:

$$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \leftrightarrow AB = BA$$
$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \leftrightarrow AB = BA$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A(A+B)+B(A+B)\\ &= A^2+AB+BA+B^2\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}&(A+B)^2 &= A^2+2AB+B^2\\ \leftrightarrow\ & A^2+AB+BA+B^2 &= A^2+2AB+B^2\\ \leftrightarrow\ & BA &= AB\end{aligned}$$

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa $AB = BA$. Chứng minh rằng $A^kB = BA^k\ \forall k$ rồi suy ra $A^kB^l = B^lA^k\ \forall k,l$

Ta dùng quy nạp để chứng minh $A^kB = BA^k\ \forall k$ $(*)$

Với $k = 1$ thì $(*)$ là hiển nhiên. Giả sử $(*)$ đúng với số nguyên k, nghĩa là: $A^kB = BA^k$ $(**)$

Khi đó,

$$A^{k+1}B = (AA^k)B = A(A^kB) \overset{\text{do }(**)}{=} A(BA^k) = (AB)A^k = (BA)A^k = BA^{k+1}$$

Vậy, $(*)$ cũng đúng với $k+1$

Theo nguyên lý quy nạp thì $(*)$ đúng với mọi k.

Đổi vai trò giữa A và B thì ta có $AB^l = B^lA\ \forall l$, nghĩa là A giao hoán với B^l. Áp dụng lại $(*)$ với B được thay bởi B^l thì ta được $A^kB^l = B^lA^k\ \forall k,l$

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa $AB = BA$. Chứng minh rằng

$$(AB)^k = A^kB^k\ \forall k$$

Ta dùng quy nạp để chứng minh $(AB)^k = A^kB^k\ \forall k$ $(*)$

Với $k = 1$ thì $(*)$ là hiển nhiên. Giả sử $(*)$ đúng với số nguyên k, nghĩa là: $(AB)^k = A^kB^k\ \forall k$ $(**)$

Khi đó,

$$(AB)^{k+1} = (AB)(AB)^k \overset{\text{do }(*)}{=} (AB)(A^kB^k)$$

Do $AB = BA$ nên theo ví dụ trên (lấy $l = k$) thì $A^kB^k = B^kA^k$. Do đó,

$$(AB)^{k+1} = (AB)(AB)^k \overset{\text{do }(*)}{=} (AB)(A^kB^k) = (AB)(B^kA^k) = A(BB^k)A^k = AB^{k+1}A^k$$

Cũng do $AB = BA$ nên theo ví dụ trên thì $B^{k+1}A^k = A^kB^{k+1}$

Vậy,

$$(AB)^{k+1} = AB^{k+1}A^k = AA^kB^{k+1} = A^{k+1}B^{k+1}$$

Theo nguyên lý quy nạp thì (*) đúng với mọi k.

Ghi chú: Nếu $AB \neq BA$ thì đẳng thức $(AB)^k = A^k B^k$ là sai

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n. Chứng minh rằng $(AB)^T = A^T B^T \leftrightarrow AB = BA$

Giả sử $(AB)^T = A^T B^T$, lấy chuyển vị 2 vế ta được:

$$\left((AB)^T\right)^T = \left(A^T B^T\right)^T \to AB = (B^T)^T.(A^T)^T = BA$$

Ngược lại, nếu $AB = BA$ thì lấy chuyển vị 2 vế sẽ được $(AB)^T = (BA)^T = A^T B^T$

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa $BA = O_{n\times n}$ (ma trận không). Chứng minh rằng $(AB)^2 = O_{n\times n}$ và $B^2 A^2 = O_{n\times n}$

Ta có: $(AB)^2 = (AB)(AB) = A(\underbrace{BA}_{O_{n\times n}})B = O_{n\times n}$ và $B^2A^2 = (BB)(AA) = B(\underbrace{BA}_{O_{n\times n}})A = O_{n\times n}$

Chú ý: Ta không thể viết $B^2A^2 = (BA)^2$ vì không có giả thiết $AB = BA$

BÀI TẬP

1. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}_{1\times 3}$ và $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}_{3\times 2}$

Tính AB, ma trận BA có tồn tại không?

2. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -5 \end{pmatrix}_{2\times 3}$, hãy tính AA^T

3. Có 3 mặt hàng tên là A, B, C được bán trong 2 ngày liên tiếp. Giá (price) của 3 mặt hàng được cho bởi ma trận $P = \begin{pmatrix} 23 & 15 & 30 \end{pmatrix}_{1\times 3}$ (tính bằng đơn vị tiền). Lượng hàng (quantity) được bán ra trong 2 ngày này được cho bởi 2 cột tương ứng của của ma trận:

$$Q = \begin{pmatrix} 210 & 200 \\ 450 & 480 \\ 135 & 160 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad \text{(tính bằng đơn vị sản phẩm)}$$

(mỗi cột của Q thể hiện lượng hàng được bán ra trong ngày tương ứng)

Tính ma trận tích PQ và nêu ý nghĩa các phần tử của ma trận này. Tính tổng doanh thu bán hàng trong 2 ngày này.

4. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, hãy tính A^2

II. Định thức (determinant)

2.1 Định nghĩa

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n.

Định thức của A là một số thực, ký hiệu là $\det A$ hoặc $|A|$, được định nghĩa như sau:

- Với $n = 1$: $A = (a_{11})$ thì $\det A = a_{11}$ (chính là phần tử duy nhất của A)

- Với $n = 2$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ thì $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \to \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = 4 - 6 = -2$

- Với $n \geq 3$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Định thức của A được gọi là định thức cấp n và định thức cấp n này sẽ được tính thông qua những định thức con cấp $n-1$ như sau:

Với mỗi i và với mỗi j, ta gọi M_{ij} là định thức của một ma trận có được từ A bằng cách *xóa dòng i và cột j*.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$ thì ta có

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 0.7 - 8.2 = -16 \quad \text{(xóa dòng 1, cột 1)}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 3.8 - 6.1 = 18 \quad \text{(xóa dòng 2, cột 3)}$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 0.4 = 2 \quad \text{(xóa dòng 3, cột 1)}$$

Trong ví dụ này, ta thấy A là ma trận vuông cấp 3 và mỗi định thức con M_{11}, M_{23}, M_{31} là định thức cấp 2 (nhỏ hơn cấp của A một bậc).

Mỗi định thức con M_{ij} được gọi là *định thức con bù* hoặc được gọi là *phần phụ đại số* (Minors) của ma trận A và là định thức cấp $n-1$

Định thức của A sẽ tính theo các định con bù bởi quy tắc khai triển theo dòng hoặc khai triển theo cột như sau:

a) Khai triển theo dòng: chọn một dòng bất kỳ của A, chẳng hạn ta chọn *dòng i*

$$\boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}}$$

Duyệt các phần tử của *dòng i* này từ trái qua phải, ta có:

$$\boxed{\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} M_{i2} + \cdots (-1)^{i+n} a_{in} M_{in}}$$

Trong đó, M_{ij} là định thức của có được từ A bằng cách *xóa dòng i và cột j*.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} \boxed{3} & \boxed{2} & \boxed{5} \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Khai triển theo *dòng 1*, ta được:

$$\begin{aligned} \det A &= \underbrace{(-1)^{1+1}}_{1}.3.\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{-2} + \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1}.2.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}_{-39} + \underbrace{(-1)^{1+3}}_{1}.5.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}_{-22} \\ &= -6 + 78 - 110 \\ &= -38 \end{aligned}$$

Nếu khai triển theo *dòng 2* thì ta được:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{7} \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1}.1.\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}_{-4} + \underbrace{(-1)^{2+2}}_{1}.4.\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}}_{-21} + \underbrace{(-1)^{2+3}}_{-1}.7.\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}_{-6} \\ &= 4 - 84 + 42 \\ &= -38 \end{aligned}$$

Ta thấy kết quả không phụ thuộc vào dòng khai triển.

Cũng áp dụng quy tắc này, nhưng thay vì duyệt phần tử trên dòng, ta duyệt phần tử trên cột thì ta có công thức khai triển theo cột:

b) Khai triển theo cột: chọn một cột bất kỳ của A, chẳng hạn ta chọn *cột j*

$$\boxed{\begin{matrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{matrix}}$$

Duyệt các phần tử của *cột j* này từ trên xuống dưới, ta có:

$$\boxed{\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} + \cdots (-1)^{n+j} a_{nj} M_{nj}}$$

Trong đó, M_{ij} là định thức của có được từ A bằng cách *xóa dòng i và cột j*.

Ví dụ: Vẫn với ma trận trên

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & \boxed{5} \\ 1 & 4 & \boxed{7} \\ 6 & 2 & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

Khai triển theo *cột 3*, ta được:

$$\begin{aligned} \det A &= \underbrace{(-1)^{1+3}}_{1}.5.\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}_{-22} + \underbrace{(-1)^{2+3}}_{-1}.7.\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}}_{-6} + \underbrace{(-1)^{3+3}}_{1}.3.\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}_{10} \\ &= -110 + 42 + 30 \\ &= -38 \end{aligned}$$

Ta thấy kết quả không phụ thuộc vào cột khai triển. Thật vậy, ta có:

Mệnh đề. Định thức không phụ thuộc vào dòng hoặc cột khai triển, nghĩa là xác định duy nhất.

Hệ quả. Nếu trong định thức có chứa một dòng (cột) nào đó bằng 0 thì định thức sẽ bằng 0.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ (dòng 1 bằng 0)

$\begin{vmatrix} a & 0 & x \\ b & 0 & y \\ c & 0 & z \end{vmatrix} = 0$ (cột 2 bằng 0)

Đối với ma trận tam giác (trên hoặc dưới) thì việc tính định thức rất đơn giản:

Mệnh đề. Định thức của ma trận tam giác thì bằng tích của các phần tử thuộc đường chéo chính.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} \boxed{2} & a & b \\ 0 & \boxed{3} & c \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{vmatrix} = 2.3.4 = 24$ (có dạng tam giác trên)

$\begin{vmatrix} \boxed{3} & 0 & 0 \\ x & \boxed{2} & 0 \\ y & z & \boxed{5} \end{vmatrix} = 3.2.5 = 30$ (có dạng tam giác dưới)

Ví dụ: Với I_n là ma trận đơn vị cấp n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

thì do I_n là ma trận tam giác nên $\det I_n = \underbrace{1.1\ldots1}_{n} = 1^n = 1$

Quy tắc Sarrus

Khi tính định thức cấp 3, ngoài cách khai triển theo dòng (cột) thì ta có thể dùng sơ đồ sau đây, còn được gọi là *quy tắc Sarrus*:

$$\left|\begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix}\right|\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = (a.e.i + b.f.g + c.d.h) - (g.e.c + h.f.a + i.d.b)$$

Ví dụ: Lấy lại ma trận trong ví dụ trên $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Dùng quy tắc Sarrus, ta có:

$$\det A = \left|\begin{matrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ 6 & 2 \end{matrix} = (3.4.3 + 2.7.6 + 5.1.2) - (6.4.5 + 2.7.3 + 3.1.2) = 130 - 168 = -38$$

Tính định thức trên máy tính Casio FX-570 ES PLUS

Để tính định thức (det) của ma trận vuông cấp 3 trên **Casio FX-570 ES PLUS**, ta nhớ sẽ có 2 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Nhập ma trận và lưu vào bộ nhớ của máy tính

- Bấm phím **MODE (SETUP)**
- Chọn mục **MATRIX**
- Chọn mục **MatA**
- Chọn mục **3×3** (là cấp của ma trận **MatA**)
- Nhập số liệu vào ma trận **MatA**
- Bấm phím **AC** để lưu vào bộ nhớ (sau động tác này thì màn hình sẽ bị xóa trắng)

Như thế, trong bộ nhớ của máy tính đã lưu một ma trận có tên là **MatA** và có số liệu như ta đã nhập vào.

Giai đoạn 2: Gọi chức năng tính định thức (det) để tính định thức của ma trận đã lưu trong bộ nhớ

- Bấm tổ hợp phím **Shift-4** (bấm phím **Shift**, rồi bấm phím số **4**)
- Chọn mục **det**
- Lại bấm tổ hợp phím **Shift-4**
- Chọn mục **MatA** và lúc này, trên màn hình sẽ hiển thị **det(MatA**
- Bấm dấu **=**

2.2 Tính chất của định thức

a) $\boxed{\det(A^T) = \det A}$

Ví dụ: $\underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{A^T}$

b) Khi đổi chỗ 2 dòng (cột) của định thức thì chỉ làm định thức đổi dấu mà thôi.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \overset{d_1 \leftrightarrow d_2}{=} -\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (đổi chỗ dòng 1 và dòng 2)

Suy ra, nếu trong định thức có 2 dòng giống nhau (hoặc có 2 cột giống nhau) thì định thức sẽ bằng 0

Ví dụ: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$ (dòng 1 và dòng 2 giống nhau)

$$\begin{vmatrix} a & x & a \\ b & y & b \\ c & z & c \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(cột 1 và cột 3 giống nhau)}$$

c) Nếu trên một dòng (cột) của định thức có thừa số chung thì ta có thể mang thừa số chung này ra trước dấu định thức.

Ví dụ: $\begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha . \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ (dòng 1 có thừa số chung)

$$\begin{vmatrix} \alpha a_1 & a_2 & a_3 \\ \alpha b_1 & b_2 & b_3 \\ \alpha c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha . \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{(cột 1 có thừa số chung)}$$

Suy ra, nếu A là ma trận vuông cấp n thì $\boxed{\det(\alpha A) = \alpha^n \det A}$

Chẳng hạn, cho $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$ là ma trận vuông cấp 3 thì

$$\det A = \begin{vmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.7 \\ 0.6 & 0.2 & 0.3 \end{vmatrix} = (0.1)^3 . \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix}}_{-38} = (0.1)^3.(-38) = -0.038$$

Ví dụ: $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2.3. \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix}}_{0} = 6.0 = 0$ (định thức có 2 dòng giống nhau thì bằng 0)

d) Nếu lấy một dòng cộng (hoặc trừ) với α lần dòng khác thì định thức không thay đổi giá trị (tương tự đối với cột)

Ví dụ: Tính định thức $\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$ với m là tham số

Ý tưởng là, ta sẽ dùng các tính chất của định thức ở trên để biến đổi định thức này về dạng tam giác, khi đó định thức dạng tam giác sẽ bằng tích của các phần tử thuộc đường chéo chính.

Ta biến đổi như sau:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} \overset{d_1+d_2+d_3}{=} \begin{vmatrix} m+2 & m+2 & m+2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$\underset{c_3-c_1}{\overset{c_2-c_1}{=}} \begin{vmatrix} \boxed{m+2} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{m-1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{m-1} \end{vmatrix} = (m+2)(m-1)^2$$

Trong ví dụ này, ta dùng tính chất: định thức không thay đổi khi lấy một dòng cộng với dòng khác, hoặc khi lấy một cột trừ đi cột khác.

Ví dụ: Tính định thức $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ với a, b, c là các tham số

Cũng như ví dụ trên, ta sẽ biến đổi định thức này về dạng tam giác như sau:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \underset{d_3-d_1}{\overset{d_2-d_1}{=}} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$\overset{d_3-d_2}{=} (b-a)(c-a)\underbrace{\begin{vmatrix} \boxed{1} & a & a^2 \\ 0 & \boxed{1} & b+a \\ 0 & 0 & \boxed{c-b} \end{vmatrix}}_{c-b}$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$

Ví dụ: Không khai triển định thức, hãy chứng minh $\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$ (với a, b, c là tham số)

Ta có:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1+c_2}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ b+c+a & c+a & 1 \\ c+a+b & a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix}}_{0} = 0 \text{ (có 2 cột giống nhau)}$$

e) Nếu A và B là các ma trận vuông cùng cấp thì $\boxed{\det(AB) = \det A \det B}$

(suy ra $\det(AB) = \det(BA) = \det A.\det B$ **)**

Ví dụ: Nếu A là ma trận vuông thì để tính định thức của ma trận AA^T cho nhanh, ta dùng tính chất trên

$$\det(AA^T) = \det A.\det(A^T) = \det A.\det A = (\det A)^2$$

Tương tự, ta có $\det(A^2) = \det(A.A) = \det A.\det A = (\det A)^2$

Tổng quát, $\det(A^k) = (\det A)^k \quad \forall k$

Ví dụ: Cho A là ma trận vuông cấp 3 thỏa $\det A = -1$ và $A^{2007} - 3A^{2006} = 4I_3$. Tính $\det(6I_3 - 2A)$

Ta có:

$$\det(6I_3 - 2A) = \det[-2(\underbrace{A - 3I_3}_{3\times 3})] = (-2)^3 \det(A - 3I_3) = -8\det(A - 3I_3)$$

Theo giả thiết:

$$A^{2007} - 3A^{2006} = 4I_3 \to A^{2006}(A - 3I_3) = 4I_3 \to \det[A^{2006}(A - 3I_3)] = \det(4I_3)$$

Mà

$$\det[A^{2006}(A - 3I_3)] = \det(A^{2006})\det(A - 3I_3) = (\underbrace{\det A}_{-1})^{2006} \det(A - 3I_3) = \det(A - 3I_3)$$

$$\det(4I_3) = 4^3 \underbrace{\det I_3}_{1} = 4^3 = 64$$

Vậy, $\det(A - 3I_3) = 64$ và $\det(6I_3 - 2A) = -8\det(A - 3I_3) = -8.64 = -512$

Một ứng dụng rất quan trọng của định thức là tính ma trận đảo.

III. Ma trận đảo (Inverse of matrix)

3.1 Định nghĩa

Cho A là ma trận vuông cấp n.

Nhắc lại, trong phép nhân ma trận thì ma trận I_n có vai trò giống như *phần tử đơn vị*:

$$A.I_n = A = I_n.A$$

Nếu tồn tại ma trận B (vuông cấp n) thỏa:

$$AB = I_n = BA$$

thì ta nói ma trận A *khả đảo* (khả nghịch - invertible) và B được gọi là *ma trận đảo* của A.

(sở dĩ ta gọi B là ma trận đảo của A là vì khi tích của hai phần tử bằng *phần tử đơn vị* thì phần tử này gọi là nghịch đảo của phần tử kia).

Ma trận B, nếu tồn tại, thì duy nhất và được ký hiệu là A^{-1}

Vậy, ma trận đảo A^{-1} có tính chất đặc trưng:

$$\boxed{AA^{-1} = I_n = A^{-1}A}$$

(nhớ rằng, I_n có vai trò là *phần tử đơn vị*).

Chú ý: Ký hiệu A^{-1} hoàn toàn không có nghĩa là $\frac{1}{A}$, vì trong phép toán ma trận không có phép toán chia nên ký hiệu $\frac{1}{A}$ là vô nghĩa.

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$ là các ma trận vuông cấp 2.

Ta có:

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ : ma trận đơn vị cấp 2 (phần tử đơn vị)}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ : ma trận đơn vị cấp 2 (phần tử đơn vị)}$$

Vậy, theo định nghĩa thì ta nói A khả đảo và B chính là ma trận đảo của A:

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ là các ma trận vuông cấp 3.

Ta có:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ : phần tử đơn vị}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \text{ : phần tử đơn vị}$$

Vậy, theo định nghĩa, ta nói A khả đảo và B chính là ma trận đảo của A:

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -5 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nhận xét: Vì $I_n.I_n = I_n$ nên $(I_n)^{-1} = I_n$ (nghịch đảo của phần tử đơn vị chính là phần tử đơn vị)

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

a) Chứng minh rằng: $A^2 - 5A + I_2 = O_{2\times2}$

Ta có:

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 9 \end{pmatrix}$$

$$5A = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 25 & 10 \end{pmatrix};\ I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vậy,

$$A^2 - 5A + I_2 = \begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 25 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 25 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2\times2}$$

b) Suy ra A^{-1}

Để tìm A^{-1}, ta sẽ tìm ma trận B thỏa $AB = I_2 = BA$, lúc đó B chính là A^{-1}

Theo câu trên, ta có:

$$\begin{aligned} A^2 - 5A + I_2 = O_{2\times2} &\leftrightarrow\ 5A - A^2 = I_2 \\ &\leftrightarrow\ A(\underbrace{5I_2 - A}_{B}) = I_2 \end{aligned}$$

Đặt

$$B = 5I_2 - A = 5\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}}_{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

thì theo trên $AB = I_2$ và

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Vậy, theo định nghĩa, ta kết luận $A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Ví dụ: Cho A là ma trận vuông cấp n.

a) Chứng minh rằng: $(I_n + A)(I_n - A) = I_n - A^2 = (I_n - A)(I_n + A)$

Dùng tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng, ta có:

$$\begin{aligned}(I_n + A)(I_n - A) &= I_n.(I_n - A) + A.(I_n - A) \\ &= (I_n)^2 - I_n.A + A.I_n - A^2 \\ &= I_n - A + A - A^2 \\ &= I_n - A^2\end{aligned}$$

Đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

b) Suy ra rằng, nếu $A^2 = O$ (ma trận không) thì $I_n + A$ khả đảo và $(I_n + A)^{-1} = I_n - A$

Nếu $A^2 = O$ thì theo câu trên, ta có:

$$(I_n + A)(I_n - A) = I_n = (I_n - A)(I_n + A)$$

Theo định nghĩa, ta kết luận $I_n + A$ khả đảo và $(I_n + A)^{-1} = I_n - A$

Ví dụ: Chứng minh rằng, nếu A khả đảo thì $\boxed{\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}}$

Ta có: $AA^{-1} = I_n \to \det(AA^{-1}) = \det I_n$

Mà $\det(AA^{-1}) = \det A.\det(A^{-1})$ và $\det I_n = 1$

Vậy, ta có: $\det A.\det(A^{-1}) = 1 \to \det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$

Ví dụ: Cho A, B, C là các ma trận vuông cấp 3, biết rằng $\det A = -2; \det B = 5; \det C = 16$

Hãy tính $\det(4A^2B^{-1}C^T)$

Phân tích $\det(4\underbrace{A^2B^{-1}C^T}_{3\times 3}) = 4^3\det(A^2B^{-1}C^T) = 4^3\det(A^2)\det(B^{-1})\det(C^T)$ và nhớ rằng,

$$\begin{cases}\det(A^2) = \det(A.A) = \det A.\det A = (\det A)^2 = (-2)^2 = 4 \\ \det(B^{-1}) = \dfrac{1}{\det B} = \dfrac{1}{5} \\ \det(C^T) = \det C = 16\end{cases}$$

Từ định nghĩa của ma trận đảo, ta rút ra:

Mệnh đề. Cho A và B là các ma trận vuông cấp n và α là một số thực. Khi đó

- Nếu A khả đảo thì A^{-1} cũng khả đảo và $\boxed{\left(A^{-1}\right)^{-1} = A}$
- Nếu A khả đảo và $\alpha \neq 0$ thì αA khả đảo và $\boxed{\left(\alpha A\right)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}A^{-1}}$
- Nếu A và B khả đảo thì AB khả đảo và $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

- Nếu A khả đảo thì A^T khả đảo và $\boxed{\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T}$

Ví dụ: Nếu A khả đảo thì

$$\left(0.1A\right)^{-1}=\frac{1}{0.1}A^{-1}=10A^{-1}$$

Ví dụ: Nếu A và B khả đảo thì

$$\left(2A^{-1}B^T\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^{-1}B^T\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(B^T\right)^{-1}.\left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(B^{-1}\right)^T.A$$

Ví dụ: Nếu A khả đảo thì $A^2=A.A$ cũng khả đảo và

$$\left(A^2\right)^{-1}=(A.A)^{-1}=A^{-1}.A^{-1}=\left(A^{-1}\right)^2$$

Ví dụ: Cho A, B, C, D là các ma trận vuông cấp n, khả đảo. Tìm ma trận X thỏa $AXB^TC^{-1}=D$

Từ phương trình $AXB^TC^{-1}=D$, ta khử A bằng cách nhân A^{-1} vào bên trái 2 vế:

$$A^{-1}(AXB^TC^{-1})=A^{-1}D\leftrightarrow(\underbrace{A^{-1}A}_{I_n})XB^TC^{-1}=A^{-1}D\leftrightarrow XB^TC^{-1}=A^{-1}D$$

Từ phương trình $XB^TC^{-1}=A^{-1}D$, ta khử C^{-1} bằng cách nhân C vào bên phải 2 vế:

$$(XB^TC^{-1})C=(A^{-1}D)C\leftrightarrow XB^T(\underbrace{C^{-1}C}_{I_n})=A^{-1}DC\leftrightarrow XB^T=A^{-1}DC$$

Từ phương trình $XB^T=A^{-1}DC$, ta khử B^T bằng cách nhân $(B^T)^{-1}$ vào bên phải 2 vế:

$$(XB^T)(B^T)^{-1}=(A^{-1}DC)(B^T)^{-1}\leftrightarrow X\underbrace{\left(B^T(B^T)^{-1}\right)}_{I_n}=A^{-1}DC(B^T)^{-1}\leftrightarrow X=A^{-1}DC(B^T)^{-1}=A^{-1}DC(B^{-1})^T$$

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa $AB=BA$ và A khả đảo.

Chứng minh rằng $A^{-1}B=BA^{-1}$

Ta có: $B=B.I_n=B(AA^{-1})=(BA)A^{-1}=(AB)A^{-1}=A(BA^{-1})$

Vậy, $B=A(BA^{-1})$ và nhân A^{-1} vào bên trái 2 vế của đẳng thức này thì ta được:

$$A^{-1}B=\underbrace{A^{-1}A}_{I_n}(BA^{-1})\leftrightarrow A^{-1}B=BA^{-1}$$

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n, khả đảo. Chứng minh rằng

$$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}\leftrightarrow AB=BA$$

Giả sử $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$, khi đó ta lấy nghịch đảo 2 vế:

$$\left((AB)^{-1}\right)^{-1}=\left(A^{-1}B^{-1}\right)^{-1}\to AB=(B^{-1})^{-1}.(A^{-1})^{-1}=BA$$

Ngược lại, giả sử $AB = BA$, ta cũng lấy nghịch đảo 2 vế thì được: $(AB)^{-1} = (BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa $A = P^{-1}BP$ với P là ma trận vuông cấp n khả đảo. Chứng minh rằng: $B^3 = PA^3P^{-1}$

Ta có: $A = P^{-1}BP \to PA = P(P^{-1}BP) = (\underbrace{PP^{-1}}_{I_n})BP = BP$

Vậy $PA = BP \to (PA)P^{-1} = (BP)P^{-1} = B(\underbrace{PP^{-1}}_{I_n}) = B$

Tóm lại, ta được $B = PAP^{-1}$, suy ra:

$$B^2 = B.B = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA(\underbrace{P^{-1}P}_{I_n})AP^{-1} = PA^2P^{-1}$$

$$B^3 = B^2B = (PA^2P^{-1})(PAP^{-1}) = PA^2(\underbrace{P^{-1}P}_{I_n})AP^{-1} = PA^3P^{-1}$$

Chú ý: Qua vi dụ này, ta thấy nếu $A = P^{-1}BP$ thì $B = PAP^{-1}$ và $A^k = P^{-1}B^kP$; $B^k = PA^kP^{-1}$

Ví dụ: Cho A là ma trận vuông cấp n thỏa $A^2 = 2A$. Chứng minh rằng $(A - I_n)^2 = I_n$ rồi từ đó suy ra $(A - I_n)^{-1}$

Vì $A.I_n = I_n.A$ nên ta áp dụng được hằng đẳng thức:

$$(A - I_n)^2 = A^2 - 2A.I_n + (I_n)^2 = \underbrace{A^2 - 2A}_{O_{n\times n}} + I_n = I_n$$

(nhắc lại, nếu $AB = BA$ thì $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$)

Vậy $(A - I_n)^2 = I_n \to (A - I_n)(A - I_n) = I_n \to (A - I_n)^{-1} = A - I_n$

3.2 Điều kiện khả đảo

Cho A là ma trận vuông cấp n.

Để A khả đảo thì điều kiện cần và đủ là $\det A \neq 0$

$$\boxed{\text{A khả đảo} \leftrightarrow \det A \neq 0}$$

Ví dụ: Ma trận nào sau đây là khả đảo?

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{\text{Casio}}{=} 0$ nên A không khả đảo, nghĩa là A^{-1} không tồn tại.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{Casio}}{=} -38 \neq 0$ nên A khả đảo, nghĩa là A^{-1} tồn tại.

Ví dụ: Tìm điều kiện để ma trận sau là khả đảo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & m & 7 \end{pmatrix} \quad \text{(m là tham số)}$$

Để A khả đảo thì $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & m & 7 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 4 - m$$

Vậy, A khả đảo khi và chỉ khi $4 - m \neq 0 \leftrightarrow m \neq 4$

(*đề nghị bạn đọc xem lại quy tắc Sarrus, rồi áp dụng để tính lại định thức trong ví dụ này*)

Ghi chú. Cho A là ma trận vuông cấp n. Ta nói:

- A *không suy biến* (non-singular) nếu $\det A \neq 0$, nghĩa là A khả đảo
- A *suy biến* (singular) nếu $\det A = 0$, nghĩa là A không khả đảo

Ví dụ: Tìm điều kiện để ma trận sau là không suy biến

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & m & 5 \end{pmatrix}$$

Để A không suy biến (khả đảo) thì $\det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & m & 5 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} m - 8$$

Vậy, A không suy biến (khả đảo) khi và chỉ khi $m - 8 \neq 0 \leftrightarrow m \neq 8$

Ví dụ: Tìm điều kiện để ma trận sau là suy biến

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&4&m\end{pmatrix}$$

Để A suy biến (không khả đảo) thì $\det A=0$

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&1\\3&4&m\end{vmatrix}\overset{\text{Sarrus}}{=}m-2$$

Vậy, A suy biến (không khả đảo) khi và chỉ khi $m-2=0\leftrightarrow m=2$

Ví dụ: Cho $A=\begin{pmatrix}m&1&0\\3&2&1\\2&1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&3&2\\2&4&3\\1&m&1\end{pmatrix}$ và đặt $C=2AB$. Tìm điều kiện để C^2 không suy biến (khả đảo).

HD: Để C^2 không suy biến thì $\det(C^2)\neq 0\leftrightarrow(\det C)^2\neq 0\leftrightarrow\det C\neq 0$

Trong đó, $\det C=\det(2\underbrace{AB}_{3\times 3})=2^3\det(AB)=8\det A.\det B$

Vậy C^2 không suy biến khi: $8\det A.\det B\neq 0\leftrightarrow\begin{cases}\det A\neq 0\\\det B\neq 0\end{cases}$

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa $AB=\alpha I_n$ với $\alpha\neq 0$. Chứng minh rằng A và B khả đảo và $A^{-1}=\frac{1}{\alpha}B$

Ta có $\det(AB)=\det(\alpha I_n)$, mà $\det(AB)=(\det A)(\det B)$ và $\det(\alpha I_n)=\alpha^n\underbrace{\det I_n}_{=1}=\alpha^n$ nên

$$(\det A)(\det B)=\alpha^n\neq 0$$

Suy ra $\det A\neq 0$, nghĩa là A khả đảo (tồn tại A^{-1}).

Nhân A^{-1} vào bên trái 2 vế của đẳng thức $AB=\alpha I_n$ thì ta được:

$$A^{-1}(AB)=A^{-1}(\alpha I_n)\to(\underbrace{A^{-1}A}_{I_n})B=\alpha\underbrace{A^{-1}I_n}_{A^{-1}}\to B=\alpha A^{-1}\to A^{-1}=\frac{1}{\alpha}B$$

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n thỏa $A\neq O_{n\times n}$; $B\neq O_{n\times n}$ và $AB=O_{n\times n}$ (ma trận không). Chứng minh rằng cả A và B đều suy biến.

Giả sử A không suy biến. Khi đó A khả đảo (tồn tại A^{-1}).

Nhân A^{-1} vào bên trái 2 vế của đẳng thức $AB=O_{n\times n}$ thì ta được:

$$A^{-1}(AB) = A^{-1}.O_{n\times n} \to (\underbrace{A^{-1}A}_{I_n})B = O_{n\times n} \to B = O_{n\times n} \text{ : mâu thuẫn với giả thiết } B \neq O_{n\times n}$$

Vậy A suy biến.

Tương tự, giả sử B không suy biến. Khi đó B khả đảo (tồn tại B^{-1}).

Nhân B^{-1} vào bên phải 2 vế của đẳng thức $AB = O_{n\times n}$ thì ta được:

$$(AB)B^{-1} = O_{n\times n}.B^{-1} \to A(\underbrace{BB^{-1}}_{I_n}) = O_{n\times n} \to A = O_{n\times n} \text{ : mâu thuẫn với giả thiết } A \neq O_{n\times n}$$

Vậy B suy biến.

3.3 Tìm ma trận đảo

Cho $A = (a_{ij})_{n\times n}$ là ma trận vuông cấp n, khả đảo. Khi đó,

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T}$$

Trong đó,

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}}$$

(nhắc lại, M_{ij} là định thức con có được từ A bằng cách xóa dòng i, cột j)

Nếu ta đặt

$$P_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T \quad \text{(có chuyển vị)}$$

(ma trận P_A được gọi là ma trận phụ hợp (co-adjoint matrix) của A)

thì công thức tính ma trận đảo trở thành:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}P_A}$$

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, tìm A^{-1}

Ta có: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 3.2 = -2 \neq 0$ nên A khả đảo, nghĩa là tồn tại A^{-1}

Theo công thức tìm ma trận đảo trên:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^T$$

$$\det A = -2$$

$$A_{11} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{1} M_{11} = 4$$

$$A_{12} = \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1} M_{12} = -3$$

$$A_{21} = \underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1} M_{21} = -2$$

$$A_{22} = \underbrace{(-1)^{2+2}}_{1} M_{22} = 1$$

Thay vào, ta được:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tổng quát, nếu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ với $\underbrace{ad - bc}_{\det A} \neq 0$ thì $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$

Ví dụ: Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ và giả sử ma trận X thỏa $XA = B$. Tìm CX

Ta tìm X từ phương trình $XA = B$ như sau:

Do $\det A = -2 \neq 0$ nên A khả đảo và $A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Nhân A^{-1} vào bên phải 2 vế của phương trình $XA = B$ thi được:

$$(XA)A^{-1} = BA^{-1} \leftrightarrow X(\underbrace{AA^{-1}}_{I_2}) = BA^{-1} \leftrightarrow X = BA^{-1}$$

Vậy,

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Do đó,

$$CX = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 26 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ví dụ: Tìm A^{-1} với

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$$

Ta có:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 5 & 0\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix}\overset{\text{Casio}}{=}-2\neq 0$$

Vậy A khả đảo và

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}^{T}$$

Trong đó,

$$\det A=-2$$

$$A_{11}=\underbrace{(-1)^{1+1}}_{1}M_{11}=\begin{vmatrix}5 & 0\\ 7 & 1\end{vmatrix}=5$$

$$A_{12}=\underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1}M_{12}=-\underbrace{\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}}_{2}=-2$$

$$A_{13}=\underbrace{(-1)^{1+3}}_{1}M_{13}=\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-1$$

$$A_{21}=\underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1}M_{21}=-\underbrace{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 7 & 1\end{vmatrix}}_{-4}=4$$

$$A_{22}=\underbrace{(-1)^{2+2}}_{1}M_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{23}=\underbrace{(-1)^{2+3}}_{-1}M_{23}=-\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}}_{-2}=2$$

$$A_{31}=\underbrace{(-1)^{3+1}}_{1}M_{31}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-5$$

$$A_{32} = \underbrace{(-1)^{3+2}}_{-1} M_{32} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}_{-2} = 2$$

$$A_{33} = \underbrace{(-1)^{3+3}}_{1} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

Thay vào, ta được:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -5 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ví dụ: Cho A là ma trận vuông cấp n, khả đảo. Gọi P_A là ma trận phụ hợp của A, chứng minh rằng:

$$\boxed{\det(P_A) = (\det A)^{n-1}}$$

Ta có: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}P_A$, đặt $\alpha = \det A$ thì $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}P_A \to P_A = \alpha A^{-1}$

Vậy,

$$\det(P_A) = \det(\alpha \underbrace{A^{-1}}_{n\times n}) = \alpha^n \det(A^{-1}) = \alpha^n \cdot \frac{1}{\det A} = (\det A)^n \cdot \frac{1}{\det A} = (\det A)^{n-1}$$

Ví dụ: Cho A và B là ma trận vuông cấp n, khả đảo và $\alpha \neq 0$. Gọi P_A, P_B, P_{AB}, $P_{\alpha A}$ lần lượt là ma trận phụ hợp của A, B, AB, αA

Chứng minh rằng $\boxed{P_{AB} = P_B P_A}$ và $\boxed{P_{\alpha A} = \alpha^{n-1}P_A}$

Do A và B khả đảo nên AB cũng khả đảo và $(AB)^{-1} = \dfrac{1}{\det(AB)}P_{AB} \to P_{AB} = \det(AB).(AB)^{-1}$

Mà $\det(AB) = \det A.\det B$ và $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ nên:

$$P_{AB} = \det A.\det B.(B^{-1}A^{-1}) = \underbrace{(\det B)B^{-1}}_{P_B}.\underbrace{(\det A)A^{-1}}_{P_A} = P_B P_A$$

Do A và nên $\alpha \neq 0$ nên αA cũng khả đảo và $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(\alpha A)}P_{\alpha A} \to P_{\alpha A} = \det(\alpha A).(\alpha A)^{-1}$

Mà $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ và $(\alpha A)^{-1} = \dfrac{1}{\alpha}A^{-1}$ nên:

$$P_{\alpha A} = \det(\alpha A).(\alpha A)^{-1} = \left(\alpha^n \det A\right)\left(\frac{1}{\alpha}A^{-1}\right) = \alpha^{n-1}\underbrace{(\det A)A^{-1}}_{P_A} = \alpha^{n-1}P_A$$

Ví dụ: Cho A là ma trận vuông cấp n, khả đảo. Gọi P_A là ma trận phụ hợp của A và đặt $B = P_A$

Chứng minh rằng $\boxed{P_B = (\det A)^{n-2} A}$, trong đó P_B là ma trận phụ hợp của B.

Ta có $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} P_A \to P_A = (\det A)A^{-1}$

Vì $\det A \neq 0$ và A^{-1} khả đảo nên $B = P_A = (\det A)A^{-1}$ khả đảo và $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} P_B \to P_B = (\det B)B^{-1}$

Mà $\det B = \det P_A = (\det A)^{n-1}$ và $B^{-1} = (P_A)^{-1} = [(\det A)A^{-1}]^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(A^{-1})^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A$ nên:

$$P_B = (\det B)B^{-1} = (\det A)^{n-1} \cdot \frac{1}{\det A} A = (\det A)^{n-2} A$$

Tìm ma trận đảo trên máy tính Casio FX-570 ES PLUS

Để tìm ma trận đảo (inverse of matrix) trên **Casio FX-570 ES PLUS**, ta thực hiện 2 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Nhập ma trận và lưu vào bộ nhớ của máy tính

- Bấm phím **MODE (SETUP)**
- Chọn mục **MATRIX**
- Chọn mục **MatA**
- Chọn mục **3×3** (là cấp của ma trận **MatA**)
- Nhập số liệu (vào ma trận **MatA)**
- Bấm phím **AC** để lưu vào bộ nhớ (sau động tác này thì màn hình sẽ bị xóa trắng)

Như thế, trong bộ nhớ của máy tính đã lưu một ma trận có tên là **MatA** và có số liệu như ta đã nhập vào.

Giai đoạn 2: Gọi chức năng tính nghịch đảo để tính nghịch đảo của ma trận đã lưu trong bộ nhớ

- Bấm tổ hợp phím **Shift-4** (bấm phím **Shift**, rồi bấm phím số **4**)
- Chọn mục **MatA**
- Bấm phím $\boldsymbol{x^{-1}}$ (lúc này, trên màn hình sẽ hiển thị $\mathbf{MatA^{-1}}$)
- Bấm dấu =

BÀI TẬP

1. Dùng Casio, tính định thức ma trận $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

Ma trận này có khả đảo không, nếu có, hãy *dùng công thức* (tính toán chi tiết trên giấy) để tìm ma trận đảo để tìm A^{-1}. Sau đó, dùng Casio để kiểm tra lại kết quả của A^{-1}

2. Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

a) Tìm điều kiện để A không suy biến

b) Khi $m = 0$, tìm A^{-1} (dùng công thức và trình bày tính toán chi tiết)

3.4 Ứng dụng của ma trận đảo

Xét hệ phương trình tuyến tính gồm có n phương trình và n ẩn số:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \qquad\qquad \vdots & \vdots \;\; \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

với n ẩn số (unknowns) là $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n\times n} ;\; X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1} ;\; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Ta gọi A là *ma trận hệ số* của hệ phương trình, ma trận này chứa hệ số của n ẩn.

Ta có:

$$AX = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{n\times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

Do đó, hệ phương trinh trên trở thành: $AX = B$

Ta giả sử A khả đảo, khi đó tồn tại A^{-1}

Nhân A^{-1} vào bên trái hai vế của phương trình $AX = B$ thì được:

$$\begin{aligned} & A^{-1}(AX) &&= A^{-1}B \\ \leftrightarrow\; & (\underbrace{A^{-1}A}_{I_n})X &&= A^{-1}B \qquad \text{(nhân } \textit{cùng phía}\text{)} \\ \leftrightarrow\; & I_nX &&= A^{-1}B \\ \leftrightarrow\; & X &&= A^{-1}B \end{aligned}$$

Vậy, hệ có nghiệm duy nhất là $X = A^{-1}B$

Hệ quả. Nếu hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ có ma trận hệ số A không suy biến thì hệ có nghiệm duy nhất cho bởi $X = A^{-1}B$

Ví dụ: Xét hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 17 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 14 \end{cases}$$

Ma trận hệ số của hệ phương trình là:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Vì $\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\text{Casio}}{=} 42 \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất cho bởi $X = A^{-1}B$ với

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Dùng công thức

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

Trong đó,

$$\det A = 42$$

$$A_{11} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{12} = \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1} M_{12} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{7} = -7$$

$$A_{13} = \underbrace{(-1)^{1+3}}_{1} M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{21} = \underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1} M_{21} = -\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}_{-11} = 11$$

$$A_{22} = \underbrace{(-1)^{2+2}}_{1} M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = \underbrace{(-1)^{2+3}}_{-1} M_{23} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}_{7} = -7$$

$$A_{31} = \underbrace{(-1)^{3+1}}_{1} M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{32} = \underbrace{(-1)^{3+2}}_{-1} M_{32} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}_{-11} = 11$$

$$A_{33} = \underbrace{(-1)^{3+3}}_{1} M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

Thay vào, ta được:

$$A^{-1} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 7 & -7 & 7 \\ 11 & 1 & -7 \\ -5 & 11 & 7 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 7 & 11 & -5 \\ -7 & 1 & 11 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix} \quad (\textit{nhớ chuyển vị})$$

Vậy, nghiệm duy nhất của hệ cho bởi:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 7 & 11 & -5 \\ -7 & 1 & 11 \\ 7 & -7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 \\ 7 \\ 14 \end{pmatrix} = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 126 \\ 42 \\ 168 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

Ví dụ: Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

a) Tìm A^{-1}

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix} \overset{\text{Casio}}{=} -1 \neq 0$$

nên A khả đảo, nghĩa là tồn tại A^{-1} và

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

Trong đó,

$$\det A = -1$$

$$A_{11} = \underbrace{(-1)^{1+1}}_{1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{12} = \underbrace{(-1)^{1+2}}_{-1} M_{12} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}}_{4} = -4$$

$$A_{13} = \underbrace{(-1)^{1+3}}_{1} M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = \underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1} M_{21} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}}_{2} = -2$$

$$A_{22} = \underbrace{(-1)^{2+2}}_{1} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{23} = \underbrace{(-1)^{2+3}}_{-1} M_{23} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}}_{-1} = 1$$

$$A_{31} = \underbrace{(-1)^{3+1}}_{1} M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = \underbrace{(-1)^{3+2}}_{-1} M_{32} = -\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}_{-1} = 1$$

$$A_{33} = \underbrace{(-1)^{3+3}}_{1} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Thay vào, ta được:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^T = -\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Tìm ma trận X thỏa phương trình $XA = A^T$

Do A khả đảo nên tồn tại A^{-1}, nhân A^{-1} vào bên phải hai vế của phương trình $XA = A^T$:

$$\begin{aligned} (XA)A^{-1} &= A^TA^{-1} \\ \leftrightarrow X(\underbrace{AA^{-1}}_{I_3}) &= A^TA^{-1} \\ \leftrightarrow X.I_3 &= A^TA^{-1} \\ \leftrightarrow X &= A^TA^{-1} \end{aligned}$$

(nhớ là nhân *cùng phía*)

Vậy,

$$X = A^TA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 10 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

BÀI TẬP

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

a) Tìm A^{-1} (trình bày tính toán chi tiết)

b) Từ đó, tìm ma trận X sao cho $AX = I_3 + A$

IV. Hạng của ma trận (rank of matrix)

4.1 Ma trận bậc thang (step-like matrix)

Xét ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{7} & 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{4} & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ma trận này có 3 dòng đầu khác 0, còn dòng cuối thì bằng 0.

Quan sát các phần tử *khác 0 đầu tiên* (từ trái qua phải) ở mỗi dòng, ta thấy chúng tuân theo một quy luật, đó là:

"*Phần tử khác 0 đầu tiên của mỗi dòng luôn bị dịch chuyển qua bên phải ít nhất một cột so với phần tử khác 0 đầu tiên của dòng đứng ngay phía trên*"

Cụ thể, phần tử khác 0 đầu tiên của dòng thứ hai là số $\boxed{4}$ đã bị dịch chuyển ít nhất một cột so với phần tử khác 0 đầu tiên của dòng thứ nhất là số $\boxed{7}$

Tương tự, phần tử khác 0 đầu tiên của dòng thứ ba là số $\boxed{2}$ đã bị dịch chuyển ít nhất một cột so với phần tử khác 0 đầu tiên của dòng thứ hai là số $\boxed{4}$

Các phần tử khác 0 đầu tiên của mỗi dòng tạo thành những bậc thang, cụ thể trong ma trận trên thì ta có tất cả 3 bậc thang.

Một ma trận được gọi là *bậc thang* nếu nó thỏa hai điều kiện sau:

- Những dòng bằng 0 (nếu có) thì nằm dưới những dòng khác 0 (nằm dưới đáy của ma trận)
- Đối với những dòng khác 0 thì phần tử khác 0 đầu tiên của mỗi dòng luôn bị dịch chuyển qua bên phải ít nhất một cột so với phần tử khác 0 đầu tiên của dòng đứng ngay phía trên.

Ví dụ: Ma trận sau là bậc thang

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{5} & 1 & 7 \\ 0 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{8} \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{7} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} \boxed{5} & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ: Ma trận sau *không* là ma trận bậc thang

$$D=\begin{pmatrix} \boxed{4} & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{3} & 5 \\ 0 & \boxed{7} & 2 \end{pmatrix}$$

vì phần tử $\boxed{7}$ của D đã vi phạm điều kiện thứ hai của ma trận bậc thang.

4.2 Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng và cột

Cho A là một ma trận. Ta có 3 loại phép biến đổi tác động lên các dòng của A, cụ thể là:

- **Loại 1**: đổi chỗ 2 dòng nào đó của A
- **Loại 2**: nhân một dòng nào đó của A với một số thực khác 0
- **Loại 3**: lấy một dòng của A cộng (hoặc trừ) với α lần dòng khác, trong đó α là một số thực tùy ý (có thể bằng 0)

Dĩ nhiên, qua các phép biến đổi sơ cấp này thì ta nhận được một ma trận mới khác với ma trận A.

Ví dụ: Đổi chỗ 2 dòng của A

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ: Nhân một dòng của A với một số thực khác 0

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}d_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ: Lấy một dòng của A cộng (hoặc trừ) với α lần dòng khác

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 - 2d_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Tương tự, ta cũng có 3 loại phép biến đổi sơ cấp tác động lên các cột của ma trận.

Ví dụ: Lấy một cột trừ đi α lần cột khác

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_1 - 2c_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -7 & 5 & 8 \\ -8 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng hoặc cột là *bình đẳng*, nghĩa là, hễ có phép biến đổi sơ cấp nào trên dòng thì cũng có phép biến đổi sơ cấp tương tự trên cột. Phép biến đổi sơ cấp trên dòng có tính chất gì thì phép biến đổi sơ cấp trên cột cũng có tính chất giống như thế.

Ta có một kết quả quan trọng sau:

Mệnh đề. Cho A là một ma trận. Khi đó,

- Tồn tại các phép biến đổi sơ cấp sao cho qua các phép biến đổi này thì A sẽ chuyển thành một ma trận *bậc thang*, mà ta gọi là B.

  $A \to A_1 \to A_2 \to \cdots \to B$ (ma trận B là *bậc thang*)

- Số dòng *khác 0* của ma trận bậc thang B là một số nguyên *duy nhất*, không phụ thuộc vào các phép biến đổi sơ cấp.

Chú ý rằng, từ ma trận A, ta có thể đưa về vô số ma trận bậc thang khác nhau bằng các phép biến đổi sơ cấp. Nói cách khác, ma trận bậc thang nhận được từ A là không duy nhất. Tuy nhiên, *số dòng khác 0* của các ma trận bậc thang này lại là duy nhất, không phụ thuộc vào cách chọn các phép biến đổi sơ cấp.

Ví dụ: Đưa ma trận sau về dạng bậc thang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Ta dùng các phép biến đổi sơ cấp:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 0 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-2d_1}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 0 & 4\\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -5\\ 0 & -2 & 2 & -10\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3-2d_2}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 0 & 4\\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

Ma trận B là bậc thang và số dòng khác 0 của B là 2. Số dòng khác 0 này là duy nhất, nghĩa là nếu ta chọn các phép biến đổi sơ cấp khác thì ma trận bậc thang nhận được vẫn có đúng 2 dòng khác 0 mà thôi.

Từ mệnh đề trên, ta đi đến định nghĩa hạng của ma trận:

4.3 Định nghĩa hạng của ma trận

Cho A là một ma trận.

Giả sử qua các phép biến đổi sơ cấp thích hợp, ma trận A chuyển thành ma trận B bậc thang. Khi đó, số dòng khác 0 của B là duy nhất.

Ta gọi số dòng khác 0 của B là *hạng* của A, ký hiệu là $r(A)$ hoặc $\text{rank}(A)$

Để tìm hạng của ma trận A, ta hãy dùng các phép biến đổi sơ cấp thích hợp để chuyển A về một ma trận bậc thang. Khi đó, số dòng khác 0 của ma trận bậc thang này chính là hạng của A.

Ví dụ: Tìm hạng ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

Ta dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa A về dạng bậc thang:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3-7d_1]{d_2-4d_1}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 3\\ 0 & \boxed{-3} & -6\\ 0 & -6 & -12\end{pmatrix}\xrightarrow{d_3-2d_2}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 3\\ 0 & \boxed{-3} & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

Ma trận B là bậc thang và có 2 dòng khác 0, do đó $r(A)=2$

Ví dụ: Tìm hạng ma trận $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -2 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}$

Ta dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa A về dạng bậc thang:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1} & -1 & 0\\ -2 & 2 & 4\\ 3 & 5 & 7\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2+2d_1}\begin{pmatrix}\boxed{1} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 8 & 7\end{pmatrix}\xrightarrow{d_2\leftrightarrow d_3}\begin{pmatrix}\boxed{1} & 2 & 3\\ 0 & \boxed{8} & 7\\ 0 & 0 & \boxed{4}\end{pmatrix}=B$$

Ma trận B là bậc thang và có 3 dòng khác 0, do đó $r(A)=3$

Ví dụ: Tìm hạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Ta dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa A về dạng bậc thang:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-2d_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2+d_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3+d_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{pmatrix} = B$$

Ma trận B là bậc thang và có 3 dòng khác 0, do đó $r(A) = 3$

Ví dụ: Tìm hạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

Ta dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa A về dạng bậc thang:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_4-4d_1]{\substack{d_2-3d_1 \\ d_3-d_1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[d_4-2d_2]{d_3-d_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 \leftrightarrow d_4} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Ma trận B là bậc thang và có 3 dòng khác 0, do đó $r(A) = 3$

Ví dụ: Tìm hạng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & m & 7 \end{pmatrix} \text{ (với m là tham số)}$$

Ta dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa A về dạng bậc thang:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 8 & m & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-2d_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 2 & m-3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3-2d_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{m-7} & 0 \end{pmatrix} = B$$

Ta thấy 2 dòng đầu của B đã khác 0 rồi, còn dòng cuối thì phụ thuộc vào m, cụ thể là:

- Nếu $m-7=0 \leftrightarrow m=7$ thì dòng cuối của B bằng 0, do đó B có 2 dòng khác 0, suy ra $r(A)=2$
- Nếu $m-7\neq 0 \leftrightarrow m\neq 7$ thì dòng cuối của B khác 0, do đó B có 3 dòng khác 0, suy ra $r(A)=3$

Vậy, ta kết luận:

$$r(A)=\begin{cases} 2 & \text{khi } m=7 \\ 3 & \text{khi } m\neq 7 \end{cases}$$

Ví dụ: Tìm hạng ma trận $A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ (với m là tham số)

Ta dùng các phép biến đổi sơ cấp liên tiếp:

$$A=\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1+d_2+d_3} \begin{pmatrix} m+2 & m+2 & m+2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = \widetilde{A}$$

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $m+2\neq 0 \leftrightarrow m\neq -2$

Lúc này, ta chia dòng 1 của $\widetilde{A}$ cho $m+2$:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} m+2 & m+2 & m+2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{m+2}d_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-d_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{m-1} \end{pmatrix} = B$$

Hạng của A phụ thuộc vào số dòng khác 0 của B. Ta biện luận:

- Nếu $m-1=0 \leftrightarrow m=1$ thì B chỉ có đúng 1 dòng khác 0, do đó $r(A)=1$
- Nếu $m-1\neq 0$ và $m\neq -2$, nghĩa là $m\neq 1$ và $m\neq -2$ thì B có đúng 3 dòng khác 0, do đó $r(A)=3$

Trường hợp 2: $m+2=0 \leftrightarrow m=-2$

Lúc này, ta thay $m=-2$ vào ma trận $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1\leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_2-d_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-3} & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Ma trận B có đúng 2 dòng khác 0, do đó $r(A) = 2$

Tóm lại, ta có kết luận:

$$r(A) = \begin{cases} 1 & \text{khi } m = 1 \\ 2 & \text{khi } m = -2 \\ 3 & \text{khi } m \neq 1 \wedge m \neq -2 \end{cases}$$

Hạng của một ma trận cho ta biết ma trận này có khả đảo hay không, cụ thể là:

Mệnh đề. Cho A là ma trận vuông *cấp n*. Để A khả đảo thì điều kiện cần và đủ là $r(A) = n$

$$\boxed{A \text{ khả đảo } \leftrightarrow r(A) = n \leftrightarrow \det A \neq 0}$$

Ví dụ: Tìm hạng ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & m & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{(với m là tham số)}$$

Ta thấy A là ma trận vuông cấp $n = 3$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & m & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 2m - 6$$

Xét 2 trường hợp

Trường hợp 1: $\det A \neq 0 \leftrightarrow 2m - 6 \neq 0 \leftrightarrow m \neq 3$

Khi đó, A khả đảo và theo mệnh đề trên thì suy ra $r(A) = n = 3$

Trường hợp 2: $\det A = 0 \leftrightarrow 2m - 6 = 0 \leftrightarrow m = 3$

Thay $m = 3$ vào A rồi đưa A về dạng bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3 - d_1]{d_2 - 3d_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{-3} & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_3 + d_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{-3} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

Ma trận B có đúng 2 dòng khác 0, do đó $r(A) = 2$

Tóm lại, ta có kết luận:

$$r(A) = \begin{cases} 2 & \text{khi } m = 3 \\ 3 & \text{khi } m \neq 3 \end{cases}$$

Trong ví dụ này, ta cũng có thể tìm hạng của A bằng cách đưa A về dạng bậc thang như sau:

$$A=\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&2\\3&m&4\\1&5&4\end{pmatrix}\xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-3d_1}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&2\\0&m-6&-2\\0&3&2\end{pmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&2\\0&\boxed{-2}&m-6\\0&2&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_3+d_2}\begin{pmatrix}\boxed{1}&2&2\\0&\boxed{-2}&m-6\\0&0&\boxed{m-3}\end{pmatrix}=B$$

Hai dòng đầu của B luôn khác 0, còn dòng 3 thì phụ thuộc vào số hạng $m-3$, do đó ta biện luận:

$$r(A)=\begin{cases}2 & \text{khi } m=3\\ 3 & \text{khi } m\neq 3\end{cases}$$

Ví dụ: Cho A và B là các ma trận vuông cấp n, không suy biến.

Chứng minh rằng: $r(AB)=r(BA)$ và $r(A^{-1}B)=r(B^{-1}A)$

Do A và B không suy biến nên A và B đều khả đảo, suy ra AB và BA khả đảo. Do đó, $r(\underbrace{AB}_{n\times n})=n$

và $r(\underbrace{BA}_{n\times n})=n$. Vậy $r(AB)=r(BA)=n$

Lập luận tương tự câu trên, với chú ý rằng, nếu A và B khả đảo thì A^{-1} và B^{-1} cũng khả đảo thì ta được $r(A^{-1}B)=n=r(B^{-1}A)$

Hạng của ma trận có tính chất sau:

Mệnh đề. Cho A là ma trận cấp $m\times n$, khi đó

- $r(A)\le m$ và $r(A)\le n$
- $r(A)$ không thay đổi qua các phép biến đổi sơ cấp, nghĩa là, nếu C là ma trận có được từ A bởi các phép biến đổi sơ cấp thì $r(C)=r(A)$
- $r(A^T)=r(A)$

Ví dụ: Chứng minh rằng $r(2A)=r(A)$

Ma trận $2A$ có được từ ma trận A bằng các phép biến đổi sơ cấp: nhân từng dòng của A với 2. Mà qua các phép biến đổi sơ cấp thì hạng ma trận không thay đổi, do đó $r(2A)=r(A)$

Cho A là ma trận cấp $m\times n$ và k là số nguyên dương thỏa $k\le \min\{m,n\}$. Một định thức con *cấp k* của A có được bằng cách lấy phần giao của k dòng và k cột nào đó của A.

Chẳng hạn, cho $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$ $(m=2,n=3)$ thì:

- Các định thức con *cấp 1* của A là: $1,2,3,4,5,6$

- Các định thức con *cấp 2* của A là: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3;\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6;\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3$

Mệnh đề. Hạng của ma trận A là *cấp cao nhất* của định thức con *khác 0* của A. Cụ thể, $r(A) = p$ khi và chỉ khi:

- Tồn tại một định thức con cấp p nào đó của A khác 0
- Mọi định thức con của A có cấp lớn hơn p thì đều bằng 0

Ví dụ: Tìm hạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Ma trận A có 2 dòng, 3 cột nên định thức con cấp cao nhất của A là cấp 2 và ta thấy trong A có chứa ít nhất một định thức con cấp 2 khác 0, chẳng hạn là: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Vây, $r(A) = 2$

Ví dụ: Tìm hạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Ma trận A có 3 dòng, 3 cột nên định thức con cấp cao nhất của A là cấp 3 và chỉ có *duy nhất* một định thức cấp 3 là:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Nói cách khác, mọi định thức con cấp 3 của đều bằng 0. Vậy, $r(A) < 3$, nghĩa là $r(A) \leq 2$

Trong A có chứa ít nhất một định thức con cấp 2 khác 0, chẳng hạn là: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Vậy, cấp cao nhất của định thức con khác 0 của A là cấp 2, do đó $r(A) = 2$

Ví dụ: Tìm hạng ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \\ 1 & m & 5 \end{pmatrix}$

Ma trận A có 3 dòng, 3 cột nên định thức con cấp cao nhất của A là cấp 3 và định thức con cấp 3 *duy nhất* này chính là:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \\ 1 & m & 5 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} -3m + 3$$

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $\det A \neq 0 \leftrightarrow m \neq 1$

Khi đó, cấp cao nhất của định thức con *khác 0* của A là cấp 3, vậy $r(A) = 3$

Trường hợp 2: $\det A = 0 \leftrightarrow m = 1$

Khi đó,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & 9 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Mọi định thức con cấp 3 (cấp cao nhất) của A đều bằng 0 nên $r(A) \leq 2$

Hơn nữa, ta thấy trong A có chứa ít nhất một định thức con cấp 2 *khác 0*, chẳng hạn là:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Vậy $r(A) = 2$

Ví dụ: Cho A là ma trận vuông cấp 5 thỏa $r(A) \leq 3$ và gọi P_A là ma trận phụ hợp của A. Chứng minh rằng P_A chính là ma trận không.

Nhắc lại, P_A là ma trận vuông cấp 5 có dạng: $P_A = \left(A_{ij}\right)_{5\times5}^T$ với $A_{ij} = (-1)^{i+j}.M_{ij}$

Trong đó, M_{ij} là định thức con (cấp 4) của A có được từ A bằng cách xóa dòng i, cột j

Vì $r(A) \leq 3$ nên cấp cao nhất của định thức con *khác 0* của A không thể vượt quá 3. Vậy mọi định thức con cấp lớn hơn 3 của A đều phải bằng 0. Suy ra mọi định thức con cấp 4 của A đều bằng 0, nghĩa là $M_{ij} = 0\ \forall i, j$. Do đó, $A_{ij} = 0\ \forall i, j$, nghĩa là mọi phần tử của P_A đều bằng 0.

BÀI TẬP

1. Cho $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 3 \\ 2 & m+2 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$. Tìm điều kiện để $r(A) = 2$

HD: Tính $\det A$ rồi xét trường hợp $\det A \neq 0$ và trường hợp $\det A = 0$

2. Cho A là ma trận vuông cấp 3 suy biến. Phát biểu sau đây đúng hay sai:

a) $r(A^T A) < 3$

b) $\det(2A) = 2\det A$

c) $r(2A) = r(3A^T)$

d) $r(A^2 - 2A) \leq 2$

HẾT CHƯƠNG 1